ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 03.12.2021.

III РАЗРЕД

1. Користећи римске цифре D, C и L напиши све бројеве веће од 300, а мање од 800. Цифре у запису једног броја се могу понављати.

2. Ако је $a - b = 150$, израчунај вредност израза:
а) $(a - b) + 200$; б) $(a - 20) - b$;
в) $a - (b - 20)$; г) $(a - 20) - (b - 20)$.

3. Израчунај непознати умањилац ако је умањеник збир бројева 548 и 276, а разлика је најмањи непаран број четврте стотине.

4. Којом цифром се завршава збир пет узастопних парних бројева? (Образложи одговор.)

5. Марко има 6 канапа. Пет канапа имају дужине: 12 cm, 13 cm, 14 cm, 16 cm и 23 cm. Марко је канапе поделио у две групе од по три канапа тако да су им укупне дужине једнаке. Одреди дужину шестог канапа. Одреди сва решења. (*Напомена*: Канапи се не могу сећи.)

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55/5**) Укупно има 9 тражених бројева: CCCL, CD, CDL, D, DL, DC, DCL, DCC, DCCL [Сваки тачно написан број **по 2 бода**, свих 9 бројева 20 бодова].

2. (**МЛ 56/1**) а) $(a - b) + 200 = 150 + 200 = 350$ [**5 бодова**];
б) $(a - 20) - b = 150 - 20 = 130$ [**5 бодова**];
в) $a - (b - 20) = 150 + 20 = 170$ [**5 бодова**];
г) $(a - 20) - (b - 20) = a - b = 150$ [**5 бодова**].

3. (**МЛ 56/1**) Из $(548 + 276) - x = 301$ [**10 бодова**] налазимо да је

$$(548+276)-x=301,$$

$$824-x=301, \quad [\textbf{2 бода}]$$

$$x=824-301, \quad [\textbf{4 бода}]$$

$$x=523. \quad [\textbf{4 бода}]$$

Напомена. Није обавезно записати једначину са непознатом x.

4. Цифре јединица ма којих 5 узастопних парних бројева су 0, 2, 4, 6 и 8 [**10 бодова**]. Када сабереш цифре јединица добијаш број 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20, па на месној вредности јединица у збиру је цифра 0. Дакле, последња цифра збира је 0 [**10 бодова**].

5. Нека је дужина шестог канапа *x* cm. Канап дужине 12 cm мора бити у једној од група (на пример првој). Марко је могао да прави групе канапа дате у табели (дужине су дате у cm).

Прва група	Друга група	Дужина шестог канапа (у cm)
12, 13, 14	16, 23, x	$x = 0$
12, 13, 16	14, 23, x	$x = 4$
12, 13, 23	14, 16, x	$x = 18$
12, 13, x	14, 16, 23	$x = 28$
12, 14, 16	13, 23, x	$x = 6$
12, 14, 23	13, 16, x	$x = 20$
12, 14, x	13, 16, 23	$x = 26$
12, 16, 23	13, 14, x	$x = 24$
12, 16, x	13, 14, 23	$x = 22$
12, 23, x	13, 14, 16	$x = 8$

Како дужина канапа не може бити 0 cm, могуће дужине шестог штапа су 4 cm, 6 cm, 8 cm, 18 cm, 20 cm, 22 cm, 24 cm, 26 cm и 28 cm (Свако тачно решење **по 2 бода**. Свих 9 решења 20 бодова.).

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 03.12.2021.

IV РАЗРЕД

1. Када је у Лондону 11 сати и 30 минута, тада је у Београду 12 сати и 30 минута. Пера живи у Београду. Он се договорио са братом, који живи у Лондону, да се чују у 17 сати по лондонском времену. Ако је сада 14 сати и 45 минута у Београду, за које време треба Пера да назове брата?

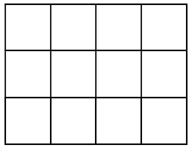
2. Клавир има 88 дирки. Белих дирки има 16 више него црних. Клавирштимер треба да замени све беле дирке на три клавира. Колико му је белих дирки потребно?

3. Јован, Милан и Драган су се договорили да један дан раде у воћњаку и да зараду поделе на три једнака дела. Уместо новца газда им је дао мобилни телефон и слушалице. Милан је узео телефон, а Јован слушалице, при чему је Милан дао Јовану 600 динара, а Драгану 2 000 динара. Колико кошта телефон?

4. Упиши бројеве у празна поља квадрата тако да он буде магичан. Образложи одговор.

122		126
129		

5. Правоугаоник страница 3 cm и 4 cm подељен је на квадратне центиметре (види слику). Колико се квадрата, а колико правоугаоника, који нису квадрати, може уочити на слици?



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55/5**) Лондонско време разликује се од београдског за 1 сат [**5 бодова**]. Када је у Београду 14 сати и 45 минута у Лондону је 13 сати и 45 минута [**5 бодова**]. Од 13 сати и 45 минута до 17 сати преостаје још 3 сата и 15 минута [**10 бодова**].

2. (**МЛ 55/5**) Ако број црних дирки означимо са x, онда белих има $x + 16$. Број црних дирки је $(88 - 16) : 2 = 72 : 2 = 36$ [**10 бодова**], а број белих дирки $36 + 16 = 52$ [**5 бодова**]. За три клавира потребно је $3 \cdot 52 = 156$ белих дирки [**5 бодова**].

3. (**МЛ 55/5**) Означимо цену телефона са T. Милан је дао Јовану и Драгану укупно $600 + 2\,000 = 2\,600$ динара, па је њему остало $T - 2\,600$ динара [**5 бодова**]. Како су после поделе сва тројица имала једнаке вредности и како је Драган добио само од Милана 2 000 динара, то је $T - 2\,600 = 2\,000$ [**5 бодова**]. Решавањем ове једначине добијамо да је цена телефона 4600 динара [**10 бодова**].

4. Означимо број у средишњем пољу магичног квадрата са A. Збир бројева у назначеној колони и дијагонали је једнак. Како су збирови једнаки и колона и дијагонала имају једно заједничко поље, следи да је $122 + 129 = 126 + A$. Решавањем једначине добијамо $A = 125$ [**5 бодова**].

122		126
129	A	

Како је збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали три пута већи од броја у средишњем пољу квадрата, тј. $3 \cdot 125 = 375$, сада можемо попунити квадрат тако да он буде магичан [сваки тачан број од преосталих 5 бројева **по 3 бода**].

122	**127**	126
129	125	**121**
124	**123**	**128**

5. Квадрата чија је дужина странице:
- 1 cm има 12 [**2 бода**]; - 2 cm има 6 [**2 бода**]; - 3 cm има 2 [**2 бода**].
Дакле, укупно квадрата има $12 + 6 + 2 = 20$ [**1 бод**].
Правоугаоника чије су дужине страница:
- 1 cm и 2cm има 17 [**2 бода**]; - 1 cm и 3 cm има 10 [**2 бода**];
- 1 cm и 4 cm има 3 [**2 бода**]; - 2 cm и 3 cm има 7 [**2 бода**];
- 2 cm и 4 cm има 2 [**2 бода**]; - 3 cm и 4 cm има 1 [**2 бода**].
Правоугаоника који нису квадрати има $17 + 10 + 3 + 7 + 2 + 1 = 40$ [**1 бод**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 03.12.2021.

V РАЗРЕД

1. Збир свих ивица коцке је 120 cm. Израчунај збир свих ивица и површину квадра који се састоји од три такве коцке.

2. Одреди све:
а) троцифрене;
б) четвороцифрене
бројеве чији је производ цифара једнак 105.

3. Одреди цифре a и b тако да је осмоцифрени број

$$\overline{2a0b2a1b}$$

дељив са 36 и да је највећи могућ.

4. Одреди све четвороцифрене бројеве облика $\overline{abba}$ такве да важи

$$\overline{ab}-\overline{ba}=3\cdot a+3\cdot b.$$

5. Колико има троцифрених бројева код којих је цифра стотина за 1 већа од цифре јединица и који су дељиви са 3?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55/5**) Коцка има 12 ивица па је дужина једне ивице 120 : 12 = 10 cm [**5 бодова**]. Димензије квадра су 10 cm, 10 cm и 30 cm, па је његова површина 1 400 cm^2 [**7 бодова**], а збир дужина његових ивица је $4\cdot 10$ cm + $4\cdot 10$ cm + $4\cdot 30$ cm = 200 cm [**8 бодова**].

2. (**МЛ 56/1**) Како је $105 = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ то [**2 бода**]:
а) троцифрених бројева има 6: 357, 375, 537, 573, 735, 753 [сваки тачно записан број **по 1 бод**];
б) четвороцифрених бројева има 24:
1357, 1375, 1537, 1573, 1735, 1753, 3157, 3175, 3517, 3571, 3715, 3751, 5137, 5173, 5317, 5371, 5713, 5731, 7135, 7153, 7315, 7351, 7513, 7531 [за свака два тачно записана броја **по 1 бод**].

3. (**МЛ 56/1**) Број је дељив са 36 ако је дељив са 4 и 9 [**2 бода**]. Како број мора бити дељив са 4 то је $b = 2$ или $b = 6$ [**2 бода**]. Како број мора бити дељив и са 9, то је збир $2a + 2b + 5$ дељив са 9 [**2 бода**]. За $b = 2$ добијамо $a = 0$ [**4 бода**] или $a = 9$ [**4 бода**], а за $b = 6$ добијамо $a = 5$ [**4 бода**]. Највећи број је за $b = 2$, $a = 9$ и то је број 29022912 [**2 бода**].

4. Из $10a + b - (10b + a) = 3a + 3b$ [**5 бодова**], добијамо $a = 2b$ [**10 бодова**]. Тражени бројеви су: 2112, 4224, 6336 и 8448 [**5 бодова**].

5. Могуће цифре стотина и јединица дате су у табели [**5 бодова**].

Цифра стотина	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цифра јединица	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Ако је збир цифара стотина и јединица дељив са 3, онда за цифру десетица постоје 4 могућности (0, 3, 6, 9) [**5 бодова**]. Ако збир цифара стотина и јединица није дељив са 3, онда за цифру десетица постоје 3 могућности (1, 4, 7 или 2, 5, 8) [**5 бодова**]. Како међу датим могућностима постоје 3 пара бројева чији је збир дељив са 3 и 6 парова бројева чији збир није дељив са 3, то укупно постоји $3\cdot 4 + 6\cdot 3 = 12 + 18 = 30$ тражених троцифрених бројева [**5 бодова**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 03.12.2021.

VI РАЗРЕД

1. Нацртај квадрат $ABCD$, па конструиши тачку B_1 на дужи AC тако да је $AB_1 = AB$. Конструиши фигуру централносиметричну квадрату $ABCD$ ако се тачка B пресликава у тачку B_1.

2. Којим бројем треба помножити разлику бројева 1 и $\frac{1}{7}$ да би се добио збир истих бројева?

3. Реши неједначину

$$\left(0,5+\frac{1}{3}:0,25-0,2\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot x>\frac{9}{5}.$$

4. Одреди све целобројне вредности броја x за које је вредност израза

$$-(-x)+|2\cdot x|$$

већа од 3, а мања од 7.

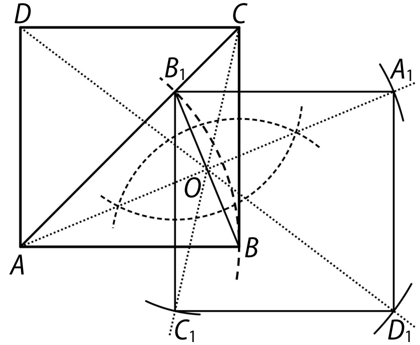
5. Одреди број x ако је $x+\frac{2021}{m}=\frac{2022}{n}$, при чему је m највећи прост делилац броја 2021, а n најмањи прост делилац броја 2022.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 56/1**) За сваку тачно одређену тачку B_1, O, A_1, C_1, D_1 **по 4 бода**.



2. (**МЛ 55/5**) Из $\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot x=1+\frac{1}{7}$ [**5 бодова**] добијамо $\frac{6}{7}\cdot x=\frac{8}{7}$ [**5 бодова**] и $x=\frac{4}{3}$ [**10 бодова**].

3. (**МЛ 55/5**) Како је $0,5+\frac{1}{3}:0,25-0,2\cdot\frac{1}{6}=\frac{9}{5}$ [**10 бодова**], добијамо да је $\frac{9}{5}\cdot x>\frac{9}{5}$, тј. $x > 1$ [**10 бодова**].

4. Из $-(-x) = x$ добијамо $3 < x + 2|x| < 7$ [**5 бодова**].
За $x > 0$ имамо $3 < 3x < 7$, па је $x = 2$ [**5 бодова**], а за $x < 0$ имамо $3 < -x < 7$, па је $x\in\{-4,-5,-6\}$ [**10 бодова**].

5. (**МЛ 55/5**) Растављањем на чиниоце добијамо $2021 = 43 \cdot 47$, па је $m = 47$ [**6 бодова**], а како је 2022 паран број, то је $n = 2$ [**4 бода**]. Из $x+\frac{2021}{47}=\frac{2022}{2}$ добијамо $x + 43 = 1011$, тј. $x = 968$ [**10 бодова**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 03.12.2021.

VII РАЗРЕД

1. Одреди све целе бројеве a тако да унија скупова

$$\{2021, 5a + 22\} \text{ и } \{2022, 4a + 1\}$$

садржи тачно 3 елемента.

2. Нека су тачке O и M редом средишта страница AB и AD квадрата $ABCD$. Израчунај колики проценат површине квадрата представља површина троугла AOM.

3. Одреди најмањи природан број n, већи од 1, за који је број $\sqrt{n\sqrt{n}}$ такође природан.

4. Израчунај вредност израза $\sqrt{(\sqrt{8}+3)^2}-\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$.

5. Дате су четири фигуре: квадрат странице a; правоугли троугао чија је једна страница једнака 10 cm, а друга 6 cm; ромб странице a и тупог угла од 150° и правоугаоник чија је једна страница једнака 8 cm. Ако све четири фигуре имају обим по 24 cm, одреди која има највећу, а која најмању површину.

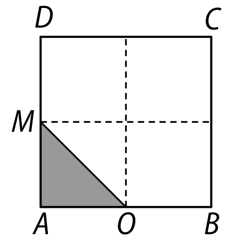
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Како је a цео број, скуп $\{2021, 5a + 22, 2022, 4a + 1\}$ садржаће тачно 3 елемента у једном од следећих случајева: $5a + 22 = 4a + 1$ [**5 бодова**], $5a + 22 = 2022$ [**5 бодова**] и $2021 = 4a + 1$ [**5 бодова**]. Одавде је $a \in \{-21, 400, 505\}$ [**5 бодова**].

2. (**МЛ 55/5**) Површина троугла AOM је $\frac{1}{8}$ површине квадрата [**10 бодова**], а то је 12,5% површине квадрата [**10 бодова**].



3. (**МЛ 56/1**) Да би број $\sqrt{n\sqrt{n}}$ био природан неопходно је да $\sqrt{n}$ буде природан број, тј. да n буде потпун квадрат. Провером за $n = 4$, $n = 9$, $n = 16$ видимо да је најмањи овакав природан број $n = 16$ [**20 бодова**].

Напомена 1. Признавати и решење ученика који су проверавали за $n = 2, n = 3, ..., n = 15, n = 16$.

Напомена 2. Ако ученик само напише $n = 16$, без образложења зашто је то најмањи број, бодовати са 5 бодова.

4. (**МЛ 56/1**) Како је $\sqrt{(\sqrt{8}+3)^2}=\sqrt{8}+3$ [**2 бода**] и $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}=|\sqrt{8}-3|=3-\sqrt{8}$ [**8 бодова**], па је тражени збир $\sqrt{8}+3-(3-\sqrt{8})=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$ [**10 бодова**].

5. (**МЛ 55/5**) Страница квадрата је 6 cm [**2 бода**], pa је $P_k = 36\text{ cm}^2$ [**2 бода**]. Трећа страница троугла је 8 cm [**2 бода**], па је $P_t = 24\text{ cm}^2$ [**2 бода**]. Страница ромба је 6 cm [**2 бода**], висина ромба 3 cm [**2 бода**], па је $P_r = 18\text{ cm}^2$ [**2 бода**]. Друга страница правоугаоника је 4 cm [**2 бода**], па је $P_p = 32\text{ cm}^2$ [**2 бода**]. Најмању површину има ромб, а највећу квадрат [**2 бода**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 03.12.2021.

VIII РАЗРЕД

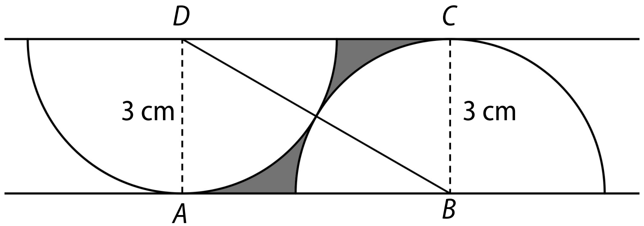
1. Летело јато гусака изнад низа од три језера. На прво језеро слетело је пола јата и још једна гуска. На друго језеро слетела је половина преосталог дела јата и још једна гуска. На треће језеро слетело је 5 гусака и после тога више није било гусака у лету. Колико је било гусака у јату на почетку?

2. Дата је кружница са центром O и полупречником 1 cm и на њој тачке A и B такве да је $\measuredangle AOB = 45°$. Тачка N је на полупречнику OB таква да је дуж AN нормална на дуж OB. Израчунај површину троугла AON.

3. Дат је квадрат $ABCD$ и на страници AD тачка E тако да је $CE = 8$ cm. Нека је тачка F подножје нормале из темена B на дуж CE. Ако је $BF = 4{,}5$ cm, израчунај дужину странице квадрата.

4. Одреди све природне бројеве n такве да када им се дода 53 добија се квадрат природног броја, а када им се одузме 42, такође се добија квадрат природног броја.

5. Тачке A, B, C, D су темена правоугаоника. Ако се кругови $k_1(D, DA)$ и $k_2(B, BC)$ додирују, израчунај површину осенченог дела на слици.

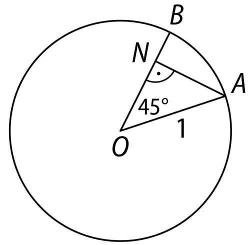


Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

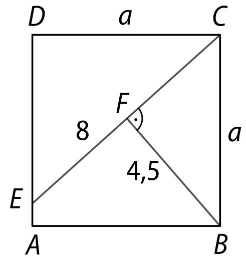
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Након што је на друго језеро слетело половина гусака и још једна остало је 5 гусака. То значи да је половина од броја гусака које су дошле до другог језера једнака 6, а укупан број гусака које су дошле до другог језера је 12 [**10 бодова**]. На исти начин добијамо да је број гусака у јату на почетку $2 \cdot (12 + 1) = 26$ [**10 бодова**].



2. (**МЛ 55/5**) Из правоуглог троугла AON добијамо да је $AN = ON = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm [**10 бодова**], па је површина $P = \dfrac{AN \cdot ON}{2} = \dfrac{1}{4}$ cm^2 [**10 бодова**].



3. (**МЛ 56/1**) Троуглови CED и BCF су слични јер су им сви одговарајући углови једнаки [**10 бодова**]. Из сличности ових троуглова следи $a : 8 = 4{,}5 : a$, одакле је $a = 6$ cm [**10 бодова**].

4. (**МЛ 55/5**) Нека је $n + 53 = x^2$ и $n - 42 = y^2$ ($x, y \in N$). Одузимањем левих и десних страна свих једнакости добијамо $95 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ [**4 бода**]. Како је $95 = 1 \cdot 95 = 5 \cdot 19$, то постоје две могућности: $x - y = 1$, $x + y = 95$ [**3 бода**] или $x - y = 5$, $x + y = 19$ [**3 бода**]. У првом случају је $x = 48$, $y = 47$, $n = 2251$ [**5 бодова**], а у другом $x = 12$, $y = 7$, $n = 91$ [**5 бодова**].

5. Тражена површина једнака је разлици површине правоугаоника $ABCD$ и полукруга полупречника 3 cm. Како је $AB = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ cm [**5 бодова**], површина правоугаоника је $9\sqrt{3}$ cm^2 [**5 бодова**]. Површина полукруга је $\dfrac{9}{2}\pi$ cm^2 [**5 бодова**]. Површина осенченог дела је $9 \cdot \left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$ cm^2 [**5 бодова**].